Clasa a VI-a
Soluții

I)

x-y=$1\cdot 2-1^2+3\cdot 4-3^2+...+2005\cdot 2006-2005^2$ **(1p)**

$=1+3+5+...+2005$ **(2p)**

= $\frac{2006\cdot 1003}{2}$ **(1p)**

$=1003^2$ **(1p)**

= n^2 **➔** $n^2=1003^2$ **(1p)**

➔ n=1003 (Finalizare 1p)

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem , va fi punctată corespunzător

Clasa a VI-a
Soluții

II)

a)Dacă k_1, k_2,…,k_{2006} sunt elementele mulțimii **A**, atunci $B=\left\{\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2},\frac{1}{k_3},...,\frac{1}{k_{2005}},\frac{1}{k_{2006}}\right\}$.

Notând cu **P** produsul elementelor mulțimii $A\cup B$, avem

$P=\left(k_1\cdot\frac{1}{k_1}\right)\left(k_2\cdot\frac{1}{k_2}\right)...\left(k_{2006}\cdot\frac{1}{k_{2006}}\right)=1\cdot1\cdot1\cdot...\cdot1=1$ **(1p)**

b) Fie $k_1=k+1$; $k_2=k+2$,…, $k_{2006}=k+2006$, $k\in N$, elementele mulțimii **A**.

Atunci $\frac{1}{k+2006};\frac{1}{k+2005};\frac{1}{k+2004};...;\frac{1}{k+1}$ sunt elementele mulțimii **B**.

Notăm $\mathbf{S_1}=(k+1)+(k+2)+…+(k+2006)$

și $S_2=\frac{1}{k+2006}+\frac{1}{k+2005}+...+\frac{1}{k+1}$. **(1p)**

Avem $S_1=(k++k+k+…+k)+(1+2+3+…+2006)=$

$=2006k+\frac{(1+2006)\cdot2006}{2}=2006k+2007\cdot1003=1003(2k+2007)$

Dar $S_2=\frac{1}{k+2006}+\frac{1}{k+2005}+...+\frac{1}{k+1}>\frac{1}{k+2006}+\frac{1}{k+2006}+...+\frac{1}{k+2006}=\frac{2006}{k+2006}$

și $S_2=\frac{1}{k+2006}+\frac{1}{k+2005}+...+\frac{1}{k+1}<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{k+1}=\frac{2006}{k+1}$ **(1p)**

Obținem $1003(2k+2007)-\frac{2006}{k+1}<S_1-S_2<1003(2k+2007)-\frac{2006}{k+2006}$

$\Leftrightarrow 2k+2007-\frac{2}{k+1}<\frac{S}{1003}<2k+2007-\frac{2}{k+2006}$

$\Leftrightarrow 2(k-\frac{1}{k+1})<\frac{S}{1003}-2007<2(k-\frac{1}{k+2006})$ **(1p)**

Pentru $k\geq1$ avem $2(k-\frac{1}{k+1})>0$ și $2(k-\frac{1}{k+2006})>0$ și atunci $\frac{S}{1003}-2007>0$, ceea ce nu convine. **(1p)**

Pentru k=0➔ $2\left(k-\frac{1}{k+1}\right)=-2$ și $2(k-\frac{1}{k+2006})=-\frac{1}{1003}$ și atunci

$-2<\frac{S}{1003}-2007<-\frac{1}{1003}$ deci $\frac{S}{1003}-2007<0$ **(1p)**

Pentru k=0 ➔ $k_1=1$; $k_2=2$; $k_{2006}=2006$, deci A={1,2,3,…,2006}.

Rezultă $B=\left\{\frac{1}{2006},\frac{1}{2005},...,\frac{1}{2},1\right\}$. Obținem $A\cup B=\left\{\frac{1}{2006},\frac{1}{2005},...,\frac{1}{2},1\right\}$ **(1p)**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem , va fi punctată corespunzător

<u>Clasa a VI-a</u>
<u>Soluții</u>

III)

(a;b) şi (p1;p2) sunt direct proporționale ➔ $\frac{a}{p1}=\frac{b}{p2}=\frac{a+b}{p1+p2}=\frac{90^\circ}{p1+p2}$ **(1p)**

Cum p1 şi p2 sunt numere naturale prime şi raportul $\frac{a+b}{p1+p2}$ este un număr natural par,

deducem că $p1+p2\in\{5;9;15;45\}$ **(1p)**

Deoarece suma a două numere naturale prime este un număr natural impar, deducem că unul dintre ele este 2. **(1p)**

Presupunem că p1=2 ➔ $p2\in\{3;7;13;43\}$ ➔ $\frac{90}{p1+p2}\in\{18;10;6;2\}$ **(1p)**

$$\left.\begin{array}{l} a=p1\cdot\frac{90}{p1+p2} \\ \text{şi} \\ p1=2 \end{array}\right\}\rightarrow a\in\{36^\circ;20^\circ;12^\circ;4^\circ\}$$ **(1)** **(1p)**

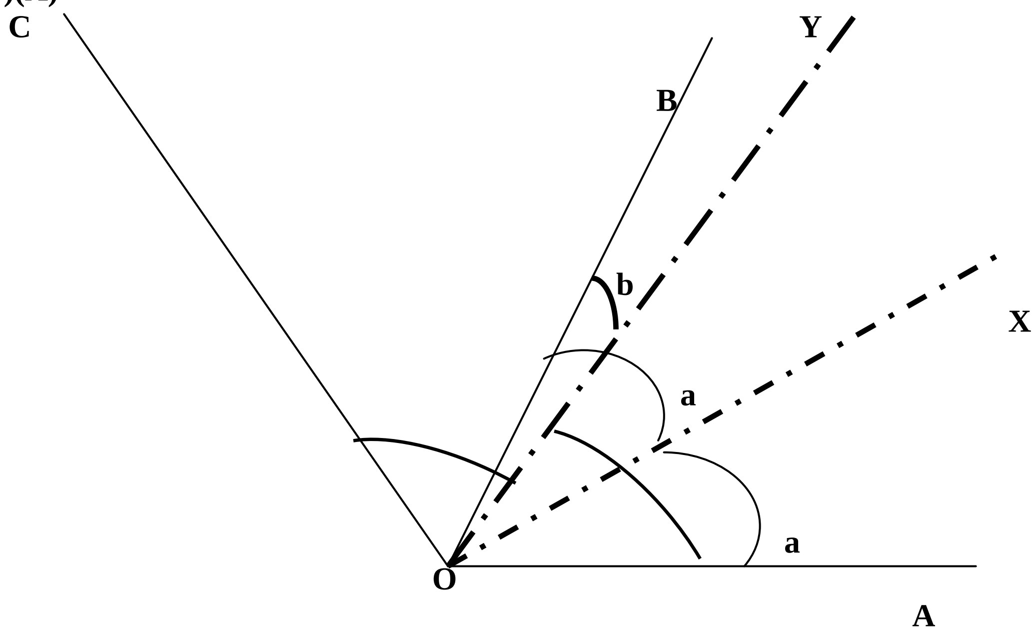
a+b=90° şi **(1)** ➔ $b\in\{54^\circ;70^\circ;78^\circ;86^\circ\}$ **(1p)**

In final, (a;b) $\in\{(36^\circ;54^\circ);(20^\circ;70^\circ);(12^\circ;78^\circ);(4^\circ;86^\circ)\}$ **(1p)**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem , va fi punctată corespunzător

<u>**Clasa a VI-a -Soluții**</u>

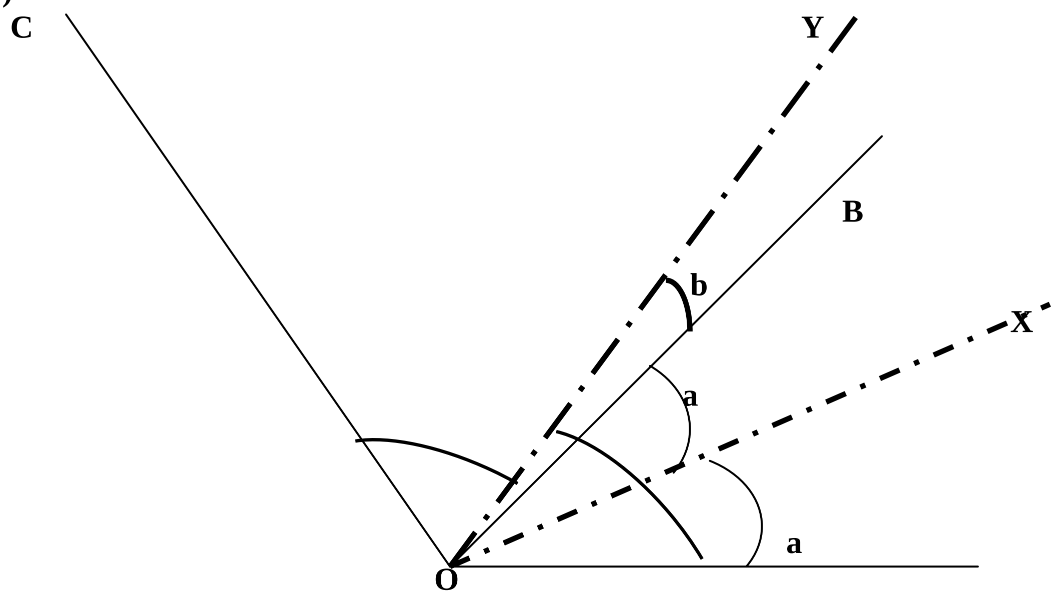
IV)(A)



Desen – (1p)

Conform notațiilor din figură, avem : Dacă m($\angle XOY) = 90^\circ$ atunci m($\angle AOC$) =2(a+90^o) = 2a+180^o ➔ m($\angle AOC$) >180^o (F)**(I) (1p)**

(B)



Desen – (1p)

Conform notațiilor din figură, avem : m($\angle AOC$) =2 • (2a + b)=4a+2b **(1p)**

Dacă m($\angle XOY) = 90^\circ$ atunci m($\angle AOC$) =4a+2b=2a+2b+2a=2(a+b)+2a➔ **(1p)**

m($\angle AOC$) =2 • 90^o+2a=180^o+2a➔ m($\angle AOC$) >180^o (F) **(II) (1p)**

Din **(I) şi (II)** ➔ m($\angle XOY) < 90^\circ$ **(1p)**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem , va fi punctată corespunzător